17. Какой излучатель называется квадрупольным?
18. Как ставится задача математической теории дифракции?

Рассмотрим задачу с движущимся шаром:

1) *Акустический диполь: центр шара радиуса a колеблется вдоль полярной оси со скоростью* $v_0 e^{-iwt}$. *Найти поток энергии и полную мощность, излучаемую акустическим диполем.*

Почему акустический? Потому что шар болтается в воздушном пространстве и служит источником звуковых волн. Поэтому и акустический.

Далее: колеблющийся шарик – это диполь, НЕ квадруполь. В случае квадруполя у нас теперь не колеблющийся шарик, а некое «кисельное» пятно

Пусть поверхность шара радиуса a колеблется так, что радиальная составляющая скорости $\tilde{v}_r$ на поверхности $r = a$ равна:

$$\tilde{v}_a = \frac{v_0}{4}(1 + 3\cos 2\theta) \times e^{-i\omega t}. \qquad (101)$$

Вот это квадруполь!

17. Какой излучатель называется квадрупольным?

Причём даже не надо соображать, как это «кисельное» пятно в пространстве движется. Зачем, если добрый Бог заранее нам дал ГУ? (Кстати, (1+3 cos 2θ)/4- это $P_2(\cos\theta)$).

Почему именно такая терминология? Всё дело в том, что конечные формулы для полной мощности будут напоминать формулы для полной мощности электромагнитного излучения от диполя/квадруполя и т.д. (Напомню, что дипольное излучение падает как $1/r^2$, квадрупольное как $1/r^3$ и т.д.) И в зависимости от того, на чью формулу похоже больше всего, Боголюбовы и называют такой-то излучатель n-польным.

Далее я буду вместе с Николаем Боголюбовым находить излучение диполя. Если вы это читаете накануне экзамена - такого вопроса на экзамене нет (так что промотайте почти до конца, там будет 18-й вопрос), а вот если вы это читаете в начале семестра – вы красавчики, потому что это есть на семинарах, так что давайте вместе разберёмся.

Давайте её решим. Сперва надо определиться, относительно чего будем писать дифур - плотности или скорости воздуха. Боголюбов-старший пишет относительно плотности и давления, младший – относительно скорости воздуха. Давайте относительно скорости воздуха.

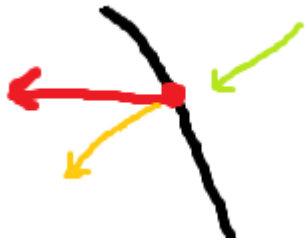
Тогда мы можем ввести такую скалярную фукнцию u(**r**,t), что grad u = **v**, т.н. потенциал скоростей.

Дифур мы запишем легко – это будет волновое уравнение:

$$\ddot{u} - v_{зв}^2 \Delta u = 0$$

Замечание. $v_{зв}$ Боголюбов-старшие выражает через другие параметры среды – ρ0, p0, показатель адиабаты. Боголюбов-младший в своей методичке же считает $v_{зв}$ данной нам константой и она у него свободно фигурирует в ответе. Я буду придерживаться подхода Коленьки.

Заминка возникнет с ГУ - у нас же шар двигается.
Давайте считать в силу малости амплитуды колебаний шара (a<<R и λ), что воздух увлекается шаром и скорость воздушных поток у шара примерно равна скорости шара.



Пусть поверхность шара (чёрная линия) имеет скорость красная стрелка. Тогда проекция скорости воздуха неподалёку должна быть зелёной стрелке, равно жёлтой (проекции красной на радиальную ось). Про перпендикулярную радиусу составляющую мы ГУ поставить не можем, т.к. ничто не мешает воздуху плясать хороводы вокруг шара, главное, чтобы он заполнял пустоту, если шар уходит, или отходил, если шар наступает.

Итак, $\frac{\partial u}{\partial r} = -v_0 \cos\varphi \, e^{-i\omega t}$ (v0 cos θ exp(-iωt))– это как раз проекция на радиальную ось, du/dr – она же, выраженная через потенциал скоростей).

И дифур, и ГУ можно упростить, считая u(**r**,t)= u(**r**)* exp(-iωt)).
Тогда дифур упростится до

$$\Delta u + k^2 u = 0, \; r > a,$$

А ГУ до

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a) = -v_0 \cos\theta, \quad r = a,$$

И добавляем условия излучения Зоммерфельда:

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

Теперь давайте приступим к решению.
Нам нужно решить уравнение Гельмгольца в сферической системе координат.
Заметим, что мы его уже решали. Точнее, мы решали лямбда-уравнение $\Delta u+\lambda u=0$.
Напомню решение – это Бессель или Нейман, помноженный на присоединённые функции Лежандра (сферическую mn-тую функцию, синусовую или косинусовую).
Здесь мы решаем уравнение $\Delta u+k^2u=0$ и получаем то же самое:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta)$$, где $\xi_n^{(1)}(z)$ - *сферическая функция Ханкеля,*

которая имеет имеет следующий вид:

$$\xi_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

Благодаря симметрии (независимости от φ) у нас не ПФЛ Лежандра, а просто полином Лежандра (при m=0 mn-тая сферофункция превращается в n-тый полином Лежандра).
А почему в ММФ мы писали линейную комбинацию функции Бесселя и функции Неймана, а здесь тупо первую функцию Ханкеля?
Напомню, что Ханкель есть Бессель + i*Нейман:
$H_\nu(x)=J_\nu(x)+i*N_\nu(x)$
Так что это такой способ объединить две функции в одну. Отметим, что функция Ханкеля от действительного аргумента может быть комплексной (как комплексной является мнимая экспонента), в отличие от Бесселя-Неймана-Инфельда-Макдональда. Это обстоятельство не позволяло использовать Ханкеля в ММФ, а тут у нас u, напомню, сама комплексная величина:

Так что использовать Ханкеля тут можно. Я бы, конечно, всё равно бы предпочёл Неймана и Бесселя (тем более что Неймана).

Теперь давайте посмотрим на нашу сумму. На ГУ у нас $v_0\cos\theta$, а $\cos\theta$ – 1-й полином Лежандра. Это означает, что занулятся все Ашки, кроме A1.

Отметим, что при k=0 (тогда уравнение Гельмгольца превращается в уравнение Лапласа) получаем набор Лежандров, как и должно быть.
Также неприятной особенностью функций Ханкеля является то, что она от действительного аргумента может быть комплексной (как комплексной является мнимая экспонента), в отличие от Бесселя-Неймана-Инфельда-Макдональда. Для нас это не является проблемой, потому что u сама по себе комплексная величина.

А чтобы мы должны найти A1 (пока у нас $u(r,\theta)=A1*\xi_1(kr)*\cos\theta$), нужно ещё раз вспомнить ГУ $\frac{\partial u}{\partial r}(a) = -v_0\cos\theta, \quad r = a,$, взяв и продифференцировать $u(r,\theta)=A1*\xi_1(kr)*\cos\theta$ по r.
Получим

$$A_1 = -\frac{v_0}{k\xi_1^{(1)'}(ka)},$$

$$u(r,\theta) = -\frac{v_0}{k}\frac{\xi_1^{(1)'}(kr)}{\xi_1^{(1)'}(ka)}P_1(\cos\theta).$$

Ну мы, канеш, молодцы. Кстати, а что там с условиями Зоммерфельда, проверять-не проверять? У обоих Боголюбовых этот момент расписан максимально непонятно, кажется, что оба не проверяют. Отмечу, что потом мы всё равно будем брать вещественную часть, а $H_\nu(x)=J_\nu(x)+i*N_\nu(x)$, т.е. у нас исчезнет Нейман и останется Бессель, который на бесконечности убывает, что и обеспечит нужное нам затухание.

А теперь самое интересное
От нас спрашивали не скорости, а поток энергии и полную мощность.
Что есть поток энергии? Боголюбов под ним имеет модуль вектора переноса энергии Умова-Пойтинга в точке ***r, θ.***

$$\overline{Y} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\rho v^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(A\frac{e^{i(kr-\pi)}}{kr}\cos\theta\frac{A^*}{c\rho_0}\frac{e^{-i(kr-\pi)}}{kr}\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|A|^2\cos^2\theta}{c\rho_0(kr)^2} = \frac{1}{8}\frac{c\rho_0(ka)^6 v_0^2}{(kr)^2}\cos^2\theta.$$

Как вы видите, в ответе есть и r, и θ. ½ взялась в результате усреднения по периоду. Звёздочка означает комплексное сопряжение.

А полная мощность – это интеграл вектора Умова-Пойтинга по сфере радиусом r, т.е. вся мощность, уносимая по всем направлениям.

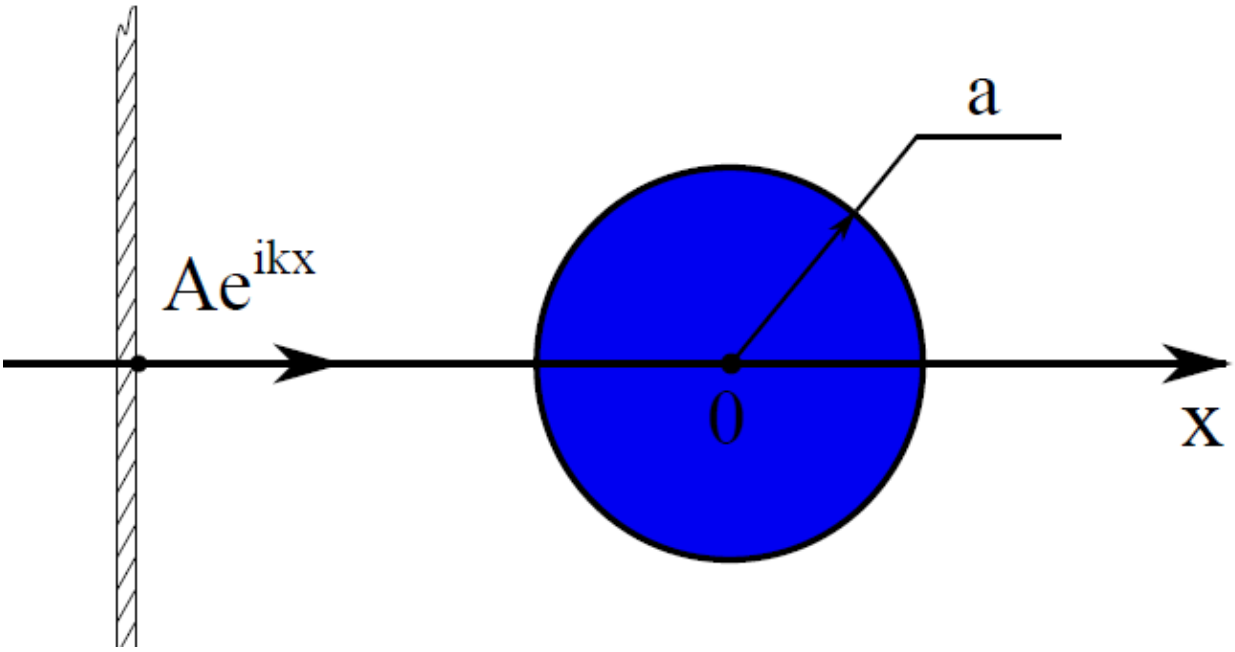
$$\Pi = \int\limits_{\Sigma^1} \overline{Y} d\delta = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \overline{Y}(r,\theta) \sin\theta r^2 dr d\theta d\varphi = \frac{\pi}{6} c\rho_0 v_0^2 a^2 (ak)^4$$

Здесь уже в ответе не может быть ни r, ни θ.

Так, теперь к 18 вопросу!

18. Как ставится задача математической теории дифракции?

Вроде такой:



Где электромагнитная волна падает на цилиндр.

Да очень просто:

$$\begin{cases} \Delta V_i + k_i^2 V_i = -f_i, \quad M \in D_i, \quad i = 0,1,2,3; & \text{ДУ Гельмгольца} \\ V_i = V_0, \quad M \in S_i, \quad i = 1,2,3; & \text{внутри цилиндра V постоянно} \\ p_i \cdot \dfrac{\partial V_i}{\partial n} = p_0 \cdot \dfrac{\partial V_0}{\partial n}; & \text{ГУ Неймана при r=R на границе цилиндра} \\ V_0(M) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{r}\right); & \text{условия на бесконечности} \\ \dfrac{\partial V_0}{\partial r} - ik_0 V_0 = o\left(\dfrac{1}{r}\right), \quad k_i^2 = \dfrac{\rho_i}{p_i}\omega^2, \quad i = 0,1,2,3. & \text{Зоммерфельда} \end{cases}$$